Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Федеральный исследовательский центр проблем химической физики и медицинской химии Российской академии наук (ФИЦ ПХФ и МХ РАН)

«Утверждаю»
и.о. директора ФИЦ ПХФ и МХ РАН
чл.-корр. РАН И.В. Ломоносов

____

«___» ___________ 2022 г.

ПРОГРАММА ВСТУПИТЕЛЬНОГО ЭКЗАМЕНА

(для осуществления приема на обучение по образовательным программам высшего образования – программам подготовки научных и научно-педагогических кадров в аспирантуре)

1.1.6. Вычислительная математика

Черноголовка 2022 г.

I. ОПИСАНИЕ ПРОГРАММЫ

Настоящая программа вступительного экзамена в аспирантуру по специальности 1.1.6. Вычислительная математика (по физико-математическим наукам) предназначена для осуществления приема на обучение по образовательным программам высшего образования – программам подготовки научных и научно-педагогических кадров в аспирантуре и содержит основные темы и вопросы к экзамену, список основной и дополнительной литературы и критерии оценивания.

II. ОСНОВНЫЕ РАЗДЕЛЫ И ВОПРОСЫ К ЭКЗАМЕНУ

Примечания:

Разделы I и II - для аспирантов математического отдела.

Раздел III - дополнительный для аспирантов отдела вычислительных и информационных ресурсов.

* - дополнительные вопросы для выпускников математических факультетов.

Математический анализ и дифференциальные уравнения

1. Непрерывность функций одной и многих переменных, свойства непрерывных функций. Полный дифференциал и его геометрический смысл. Достаточные условия дифференцируемости. Градиент.
2. Неявные функции. Существование, непрерывность и дифференцируемость неявных функций. Криволинейные координаты на многообразии.
3. Первообразная ,определенный интеграл. Формула Ньютона, условия интегрируемости. Интегрируемость непрерывной функции.
4. Понятие метрического пространства, полные метрические пространства, компактность. Теорема Больцано-Вейерштрасса. Принцип сходимости Коши, теорема Бэра.
5. Гильбертово пространства. Изоморфизм L_2 и l_2. Сходимость в среднем. Ортогональные системы функций. Неравенство Бесселя, условие полноты. Ряды Фурье. Сходимость рядов Фурье.
6. Интегральные уравнения Фредгольма. Теоремы Фредгольма.
7. Линейное пространства, их подпоространства. Базис, размерность. Теорема о ранге матрицы. Система линейных уравнений. Геометрическая интерпретация системы линейных уравнений. Фундаментальный набор решений системы однородных линейных уравнений. Теорема Кронкера-Капелли.
8. Билинейные и квадратичные функции и формы в линейных пространствах, их матрицы. Приведение к нормальному виду. Закон инерции.
9. Линейные отображения и преобразования линейного пространства, их задание матрицами. Характеристический многочлен. Собственные векторы , и собственные значения., присоединенные векторы , Жорданова форма матриц
10. Нормированные и эвклидовы пространства. Ортонормированные базисы. Ортогональные матрицы. Ортогональные, унитарные и самосопряженные преобразования. Приведение квадратичной формы к главным осям.
11. Афинные преобразования Аффиная и метрическая классификация кривых и поверхностей 2-го порядка.
12. Группы. Подгруппы. Порядок элемента. Циклические группы. Фактор-группа. Теорема о гомоморфизмах.
13. Дифференциальное уравнение и система уравнений в нормальной форме. Теорема о существовании и единственности решения. Непрерывная зависимость решения от параметров и начального условия. Понятие устойчивости по Ляпунову.
14. Динамические системы, их особенности, инвариантные многообразия, траектории. Предельные

множества. Особые точки системы дифференциальных уравнений на плоскости и их классификация. Предельные циклы.

15. Линейные дифференциальные уравнения: однородные и неоднородные. Фундаментальная матрица линейной системы дифференциальных уравнений. Определитель Вронского и формула Лиувилля. Общее решение уравнений с постоянными коэффициентами. метод вариации произвольных постоянных.
16. Линейные уравнения в частных производных второго порядка. Их классификация. Задача Дирихле и Неймана для оператора Лапласа. Задача Коши для уравнения струны. Первая краевая задача и задача Коши для уравнения теплопроводности.
17. Функции комплексного переменного. Условия Коши-Римана. Геометрический смысл аргумента и модуля производной.
18. Элементарные функции комплексного переменного и даваемые ими конформные отображения. Простейшие многозначные функции. Дробно-линейные преобразования.
19. Теорема Коши об интеграле по замкнутому контуру. Интеграл Коши. Ряд Тейлора. Аналитическое продолжение.
20. Ряд Лорана. Полюс и существенно особая точка. Вычеты. Применение к вычислению интегралов.
21. Простейшие задачи вариационного исчисления и оптимального управления. Уравнение Эйлера-Лангража и принцип максимума. Геодезические линии на поверхности. Интерполяционные и сглаживающие сплайны.
22. Дифференциальные формы на многообразиях. Общая теорема Стокса. Следствия для векторных полей в трехмерном пространстве. Дивергенция. Вихрь.
23. Простейшие задачи вариационного исчисления и оптимального управления. Уравнение Эйлера-Лангража и принцип максимума. Геодезические линии на поверхности. Интерполяционные и сглаживающие сплайны.
24. Дифференциальные формы на многообразиях. Общая теорема Стокса. Следствия для векторных полей в трехмерном пространстве. Дивергенция. Вихрь.

Дополнительные вопросы для аспирантуры в математическом отделе.

* 25. Аналитическая функция в целом. Римановы поверхности.

* 26. Функции с ограниченным изменением. Мера в смысле Лебега. Теорема Д.Ф. Егорова, С-свойства. Абсолютно непрерывные фукции. Суммируемые функции. Интеграл Лебега и его основные свойства

* 27. Первая квадратичная форма поверхности. Вторая квадратичная форма поверхности. Нормальная кривизна линии на поверхности. Теорема Менье. Геодезическая кривизна. Геодезические линии. Главные направления и главные кривизны. Формула Эйлера. Гауссовая кривизна поверхности.

* 28. Понятие топологического пространства и гладкого многообразия. Основы римановой геометрии и тензорного анализа (аффинная связаность, ковариантное дефференцирование, тензор).

* 29. Элементы выпуклого анализа в линейных пространствах: выпуклые множества, конусы, функции. Субдифференциал выпуклой функции. Терема Хана-Банаха и отделимость пары выпуклых множеств. Двойственный критерий непересечения конечной системы выпуклых конусов (уравнение Эйлера).

* 30. Задачи на экстремум в нормированных пространствах. Ограничения типа равенства и неравенства, их локальная линейная и выпуклая аппроксимация. Необходимые условия первого порядка для локального минимума в гладких задачах с ограничениями (правило множителей Лангража, условие Куна-Таккера).

Элементы вычислительной математики

1. Основные понятия теории разностных схем. Аппроксимация, устойчивость, сходимость к решению. Методы решения сеточных уравнений и систем. решение трех-диагональных систем методом прогонки.
2. Численные методы линейной алгебры (метод Зейделя, метод Гаусса, выбор главных элементов), численные методы в задачах на собственные значения. Итерационные методы решения нелинейных уравнений метод Ньютона, метод градиентного спуска, продолжение по параметру).
3. Разностные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений (метод Эйлера, методы Рунге-Кутта). Простейшие методы решения краевой задачи для уравнения 2-го порядка.
4. Разностные методы для уравнений с частными производными. Явные и неявные схемы для уравнения теплопроводности. Метод характеристик и псевдовязкости для уравнений одномерной нестационарной газовой динамики в переменных Лагранжа.
5. Методы типа Галеркина для дифференциальных уравнений и вариационных задач.

ИНФОРМАТИКА

1. Классификация ЭВМ и вычислительных систем по их архитектуре и целям применения. Понятие о простейшей архитектуре с последовательной обработкой, мультипроцессорных вычислительных системах и вычислительных комплексов с параллельной обработкой данных.
2. Языки программирования. Подходы к их классификации (по уровню абстракции, по классам применений, по классам пользователей). Понятие о методах трансляции. Лексический, синтаксический, семантический анализ. Генерация объектного кода.
3. Структурное программирование, программирование сверху-вниз (пошаговая детализация). Основные принципы объектно-ориентированного программирования.
4. Концепция типа данных. Скалярные, составные, ссылочные типы. Очереди, стеки, деки, деревья, графы, таблицы. Алгоритмы обработки и поиска. Средства инкапсуляции данных. Понятие абстрактных типов данных.
5. Модели данных. Иерархическая, сетевая, реляционная. Алгебра отношений. Примеры соответствующих СУБД. Информационно-поисковые системы, классификация. Методы реализации и методы ускорения поиска. Понятие о базе знаний.
6. Понятие алгоритма. Алгоритмические схемы Тьюринга, Поста и Маркова. Алгоритмически неразрешимые проблемы.
7. Алгебра логики. Булевы функции. Канонические формы задания булевых функций. Понятие полноты системы булевых функций. Логика 1-го порядка. Выполнимость и общезначимость. Общая схема метода резолюций.
8. Графы, деревья, планарные графы; их свойства. Вершины. Ребра. Конечный граф. Путь. Цикл. Петля.
9. Погрешность результата численного решения задачи. Неустранимая погрешность. Запись чисел в ЭВМ. Абсолютная и относительная погрешности. Понятие "устойчивого" алгоритма.

III. ПРИМЕР ЭКЗАМЕНАЦИОННОГО БИЛЕТА

Вопрос 1. Непрерывность функций одной и многих переменных, свойства непрерывных функций. Полный дифференциал и его геометрический смысл. Достаточные условия дифференцируемости. Градиент.

Вопрос 2. Численные методы линейной алгебры (метод Зейделя, метод Гаусса, выбор главных элементов), численные методы в задачах на собственные значения. Итерационные методы решения нелинейных уравнений метод Ньютона, метод градиентного спуска, продолжение по параметру).

Вопрос 3. Классификация ЭВМ и вычислительных систем по их архитектуре и целям применения. Понятие о простейшей архитектуре с последовательной обработкой, мультипроцессорных вычислительных системах и вычислительных комплексов с параллельной обработкой данных.

IV. ЛИТЕРАТУРА

Основная литература

1. Смирнов В.И. Курс высшей математики. М.: Наука, т. 1-4, 1974.
2. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. М.: Наука, 1971.
3. Гельфанд И.М. Лекции по линейной алгебре. М.: Наука, 1971.
4. Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1970.
5. Годунов С.К. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1979.
6. Привалов И.И. Введение в теорию функций комплексной переменной. М.: Наука,1977.
7. Гельфанд И.М., Фомин С.В. Вариационное исчисление. М.: Физматгиз, 1961.
8. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1976.
9. Погорелов А.В. Дифференциальная геометрия. М.: Наука, 1969.
10. Шилов Г.Е. Математический анализ. Функции одной переменной. Функции нескольких вещественных переменных. М.: Наука, ч. 1-2,3,1972.
11. Самарский А.А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1977.
12. Рихтмайер Р., Мортон К. Разностные методы решения краевых задач. М.: Мир, 1972.
13. Воеводин В.В. Вычислительные основы линейной алгебры. М.: Наука, 1977.
14. Бахвалов Н.С. Численные методы. М.: Наука, 1975.
15. Марчук.Г.И. Методы вычислительной математики. М.Наука.1989.

Дополнительная литература

1. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. М.: Наука, т. 1 -3, 1970.
2. Треногин В.А. Функциональный анализ. М.: Наука, 1993.
3. Иоффе А.Д., Тихомиров В.М. Теория экстремальных задач. М.: Наука, 1974.
4. Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л. Методы сплайн-функций. М.: Наука, 1980.
5. Арнольд В.К. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1975.

Литература по разделу информатика

1. Ахо А., Ульман Дж. Теория синтаксического анализа, перевода и трансляции.М.: Мир, т1., т2, 1978.
2. Дейт К. Введение в системы баз данных. М.: Наука, 1980.
3. Кауфман В. Ш. Языки программирования. Концепции и принципы. Радио и Связь, 1993.
4. Кнут Д. Искусство программирования. М.: Мир, т. 1, 1976, т. 2, 1977, т.3, 1978.
5. Королев Л.Н. Структуры ЭВМ и их математическое обеспечение. М.: Наука, 1978.
6. Любимский Э.З., Мартынюк В.В., Трофимов Н.П. Программирование, М.: Наука, 1980.
7. Попов Ю.П., Самарский А.А. Вычислительный эксперимент. М.: Знание, 1983.
8. Пратт Т. Языки программирования: разработка и реализация. М.: Мир, 1979.
9. Смирнов А.Д. Архитектура вычислительных систем. М.: Наука, 1990.
10. Тихонов А.Н., Костомаров Д.П. Вводные данные по прикладной математике. М.: Наука, 1984.
11. Хокни Р., Джесхоуп К. Параллельные ЭВМ. М.: Радио и Связь, 1986.
12. Чень Ч., Ли Р. Математическая логика и автоматическое доказательство теорем. М.: Мир, 1973

13. Яблонский С.В. Введение в дискретную математику. М.: Наука, 1979.

V. КРИТЕРИИ ОЦЕНИВАНИЯ

Уровень знаний поступающих в аспирантуру ФИЦ ПХФ и МХ РАН оценивается по пятибалльной шкале (5 - отлично, 4- хорошо, 3 - удовлетворительно, 2 – неудовлетворительно, 1 - неудовлетворительно). Вступительное испытание считается пройденным, если абитуриент получил три балла и выше. При отсутствии поступающего на вступительном экзамене в качестве оценки проставляется неявка. Результаты сдачи вступительных экзаменов сообщаются поступающим в день экзамена путем их размещения на сайте.

Критерии и показатели оценивания ответа на вступительном экзамене по специальности поступающих в аспирантуру ФИЦ ПХФ и МХ РАН

Вступительный экзамен по специальности в аспирантуру Центра проводится в устной форме по экзаменационным билетам и состоит из трех вопросов.

Уровень	Балл	Показатели оценивания ответа
Минимальный уровень знаний	1	Отсутствуют ответы на теоретические вопросы.
Низкий уровень знаний	2	Отсутствует ответ на один из заданных теоретических вопросов, фрагментарный ответ на заданные теоретические вопросы.
Средний уровень знаний	3	Неполные ответы на заданные теоретические вопросы.
Достаточный уровень знаний	4	Полные ответы на заданные теоретические вопросы.
Высокий уровень знаний	5	Исчерпывающие ответы на все заданные вопросы, свободное владение материалом.

VI. АВТОРЫ

1. д.ф.-м.н., г.н.с. Э.Б. Фельдман
2. зам.директора ФИЦ ПХФ и МХ РАН к.х.н. А.В. Казакова